



به نام خدا
هفتمین المپیاد هندسه ایران
سطح متوسط
۹ آبان ۱۳۹۹
زمان: ۲۷۰ دقیقه

مسائل این آزمون باید تا زمان انتشار آن‌ها در وبسایت رسمی المپیاد هندسه ایران محرمانه بمانند. آدرس وبسایت: igo-official.ir

مسئله ۱. دوزنقه $ABCD$ داده شده است که در آن AB و CD موازی هستند. فرض کنید M وسط پاره خط AB باشد. نقطه N روی پاره خط CD قرار دارد به طوری که $\angle ADN = \frac{1}{4}\angle MNC$ و $\angle BCN = \frac{1}{4}\angle MND$. ثابت کنید N وسط پاره خط CD است.

مسئله ۲. مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) با مرکز دایره محیطی O مفروض است. نقطه N وسط پاره خط BC و نقطه M قرینه N نسبت به ضلع AC است. فرض کنید T نقطه‌ای باشد که $ANBT$ مستطیل است. ثابت کنید $\angle OMT = \frac{1}{4}\angle BAC$.

مسئله ۳. در مثلث حاده الزاویه ABC ($AC > AB$) نقطه H مرکز ارتفاعی و نقطه M وسط پاره خط BC است. میانه AM دایره محیطی مثلث ABC را در X قطع می‌کند. خط CH عمود منصف BC را در E و دایره محیطی مثلث ABC را برای بار دوم در F قطع می‌کند. نقطه J روی دایره ω ، گذرنده از X ، E و F قرار دارد به طوری که $BCHJ$ دوزنقه است ($CB \parallel HJ$). ثابت کنید JB و EM روی ω هم‌رسند.

مسئله ۴. مثلث ABC داده شده است. دایره‌ای دلخواه به مرکز J ، گذرنده از B و C ، اضلاع AC و AB را به ترتیب در E و F قطع می‌کند. فرض کنید X نقطه‌ای باشد که مثلث FXB با مثلث EJC متشابه است (با همین ترتیب) و نقاط X و C در یک طرف خط AB قرار دارند. به طور مشابه، فرض کنید Y نقطه‌ای باشد که مثلث EYC با مثلث FJB متشابه است (با همین ترتیب) و نقاط Y و B در یک طرف خط AC قرار دارند. ثابت کنید خط XY از مرکز ارتفاعی مثلث ABC می‌گذرد.

مسئله ۵. همه اعداد $n \geq 4$ را بیابید که یک چندوجهی محدب با دقیقاً n وجه وجود داشته باشد، که همه وجه‌های آن مثلث قائم‌الزاویه باشد.
(توجه کنید که زاویه بین هر دو وجه مجاور در یک چندوجهی محدب کمتر از 180° است.)

بارم هر سؤال ۸ نمره است.
موفق باشید.